Observatorio de las Ciencias Sociales en Iberoamérica
ISSN: 2660-5554
Vol 5 Nº 1 Enero-Marzo 2024

Raíces cuadráticas - métodos alternativos

Una manera más sencilla de hallar raíces cuadráticas.

Mgtr (educación) Econ. Luis Damián Jungnikel Matamoros
Docente del Magisterio ecuatoriano (Docente investigador) Guayaquil, Ecuador
Orcid ID 0000-0003-0962-1076
Unidad Educativa Fiscal Chongón
luis.jungnikel@educacion.gob.ec

Mgtr Econ. Mishelle Stephanie Loor Solarte
Investigadora. Guayaquil, Ecuador
Orcid ID 0009-0003-4611-9672
mloorsolarte@gmail.com

RESUMEN

La metodología tradicional para la enseñanza de resolución de ecuaciones cuadráticas, es decir en su factorización, incluyen la memorización de ecuaciones y de algoritmos que, aunque han facilitado hasta hoy encontrar los resultados de manera eficiente, limitan notablemente la creatividad que nos brindan las matemáticas. En este breve artículo, usted encontrará tres propuestas de algoritmos y formas alternativas de la ecuación general, que pueden ser implementadas en la enseñanza del día a día, facilitando aún más la resolución de dichas parábolas. El primer método es una variante de la ya popular forma usada por el Dr. Po-Shen Loh, mientras que la segunda y tercera son aproximaciones de la famosa fórmula general, simplificándola significativamente, para hacer más sencilla su aplicación.
Palabras clave: Raíces de ecuaciones cuadráticas, fórmula de ecuación cuadrática, factorización de ecuaciones cuadráticas, didáctica de Matemática económica.

Quadratic roots - alternative methods

An easier way to find quadratic roots.

ABSTRACT

The traditional methodology for teaching the solution of quadratic equations, that is, their factorization, includes the memorization of equations and algorithms that, although they have made it easier until today to find the results efficiently, significantly limit the creativity that the math. In this short article, you will find three proposals for algorithms and alternative forms of the general equation, which can be implemented in day-to-day teaching, making the resolution of these parabolas even easier. The first method is a variant of the already popular form used by Dr. Po-Shen Loh, while the second and third are approximations of the famous general formula, simplifying it significantly, to make its application easier.

Keywords: Roots of quadratic equations, quadratic equation formula, factoring quadratic equations, mathematical economics, teaching of mathematical economics.

INTRODUCCIÓN

Según Herrera las funciones son ecuaciones que, representan relaciones entre una variable dependiente y una o más variables independientes. Este término es muy utilizado en matemáticas y en las ciencias aplicadas que necesitan expresar la relación de una magnitud hacia otra o varias magnitudes. Este avance en las matemáticas les es atribuido a Lejeune en 1837 y su primera definición moderna a Leibniz en 1637.

El campo de aplicación de las funciones cuadráticas es las ciencias es bastante amplio. En la física, por ejemplo, permiten describir el movimiento de las partículas bajo la influencia de fuerzas tales como, el tiro parabólico o también en el flujo de energía con valores máximos o mínimos. En cambio, en la Economía sus aplicaciones son diversas debido a que, por su forma, permiten estudiar valores de máximos tales como producción, ventas, uso de máquinas, entre otras y, valores mínimos como costes.

En lo que nos corresponde a la presente publicación, son tres los puntos que permiten estudiar la forma de la curva cuadrática (parábola); estas son el vértice y dos raíces[1].

CONOCIMIENTOS PREVIOS

La parábola es una curva simétrica, cortada por un eje de simetría, por el cual intercepta el punto crítico sea máximo o mínimo. Su forma general se representa de la siguiente manera:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c pertenecen al conjunto de los números reales y $a \neq 0$

$$f(x) = y$$

Corresponde a la imagen de la función o variable dependiente.

[1] Pueden existir tres casos: dos raíces, una raíz, o ninguna.

ISSN: 2660-5554
Vol 5 Nº 1 Enero-Marzo 2024

$$a$$

Corresponde al coeficiente de la variable independiente cuadrática.

$$b$$

Corresponde al coeficiente lineal.

$$c$$

Corresponde al coeficiente independiente.

Para poder graficar, de manera eficiente, una parábola, se necesitan como mínimo tres puntos. Debido a la cualidad simétrica de las parábolas y por convención, se opta por encontrar el eje de simetría, el valor en "x" donde pasa el vértice que, a su vez, corresponde al punto máximo o mínimo de la función.

Se sabe además que dicho punto crítico ocurre cuando la derivada es igual a cero. Consideremos a continuación las siguientes leyes esenciales de la derivada:

$$k\frac{dy}{dx} = 0$$

La derivada de una constante es igual a cero (en este caso $k' = 0$).

$$x\frac{dy}{dx} = 1$$

La derivada de una variable es igual a la unidad (en este caso $bx' = b$).

$$x^n\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

La derivada de una potencia es igual al exponente multiplicado a la variable, y esta, elevada al exponente menos la unidad (en este caso $ax^{2\prime} = 2a$). Al aplicar las leyes de la derivación en la forma general se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

El punto donde se obtiene el punto crítico de una función cuadrática es, cuando:

$$\frac{dy}{dx}\lim_{x\to 0} = Max \wedge Min$$

Por tanto, el punto en "x" donde se encuentra el punto crítico de la función cuadrática debiera ser cuando su derivada es igual a cero. Pudiendo obtener así el valor de "x" por despeje.

$$x = (eje\ de\ simetría) = \frac{-b}{2a}$$

O también, la ecuación de la pendiente es la misma del eje de simetría, entonces:

$$m = \frac{-b}{2a}$$

Se puede obtener la imagen, es decir el valor de y del vértice, reemplazando el valor del eje de simetría en la función cuadrática original.

$$vértice = \left(\left(\frac{-b}{2a}\right); f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

De acuerdo a varios autores, y en especial a Ramírez , existen múltiples métodos para encontrar las raíces, tales como:

- Caso de factorización $x^2 + bx + c$
- Caso de factorización $ax^2 + bx + c$
- División sintética
- Método de la tijera
- Método de la tabla

Lamentablemente, estos métodos tienen por objetivo obtener valores enteros de las raíces de la función cuadrática. Sin embargo, no siempre esto es posible, ya que puede obtenerse resultados erróneos, debido a valores decimales, irracionales o inclusive valores imaginarios. Para ello, recurrimos a la confiable ecuación general o de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A continuación, en esta publicación, encontrará tres sugerencias de algoritmos para encontrar el corte con el eje de las X, es decir, las raíces cuadráticas.

Son tres los componentes correspondientes a cada uno de los métodos a presentarse. El primer componente es la condición inicial, la cual garantice que funcione el método; el segundo es el discriminante[2], y el tercero es la ecuación general modificada.

1. Primera propuesta: simplificando el popular método por Po-Shen Loh

Condición inicial:

$$a \neq 0;\ a = 1$$

$$\triangle = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

(El cual es el discriminante)

$$x_{\,1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{(\triangle)}$$

O también:

$$x_{\,1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

2.1 Demostración del primer método

Partiendo de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

Garantizando que el coeficiente $a = 1$; queda:

$$ax^2 + bx + c \ \ \therefore\ \ x^2 + bx = c$$

Conociendo que el eje de simetría corta la parábola en dos partes iguales, se supondrá que las raíces se encuentran a una distancia determinada y, aprovechando la propiedad de la suma por

[2] Tanto en la ecuación general como en las tres sugerencias de esta publicación, el discriminante permitirá detectar si es posible el encontrar respuesta. Si el valor obtenido es positivo se encontrarán dos raíces, si es cero solo una raíz y, si es negativo ninguna (es decir, valores imaginarios).

una diferencia, obtenemos:

$$\left(\left(-\frac{b}{2}\right)+u\right)\left(\left(-\frac{b}{2}\right)-u\right) = c$$

En donde "u" es el valor desconocido que se sumará a $\frac{-b}{2}$ para obtener las raíces. Entonces, sirviéndose de la propiedad de la suma por una diferencia, y desconociendo los valores posibles, se opta por la mitad de "b", para hallar esos números.

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - u^2 = c$$

$$-u^2 = c - \left(-\frac{b}{2}\right)^2$$

Despejando queda u:

$$u = \sqrt{\left(\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c\right)}$$

Completando los valores para "x":

$$x_{1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Esta forma de llegar al valor de "x" es popularizada por el Dr. Po-Shen Loh, no obstante, se podrían reducir notablemente los pasos al llegar directamente a esta forma desde la ecuación general reducida en donde al coeficiente "a" se le garantiza el valor de uno.

2. Segunda propuesta: Fórmula cuadrática bajo la condición $b = -2$

Condición inicial:

$$a \neq 0;\ b = -2$$

$$\triangle = 1 - ac$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\triangle}}{a}$$

O también:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - ac)}}{a}$$

2.1 Demostración del segundo método

Partiendo de la ecuación general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Garantizaremos que, el valor del coeficiente $b = -2$ al multiplicar por un número, a toda la función, de ser necesario. Reemplazando "b":

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4ac}}{2a}$$

Sacando factor común dentro de la raíz se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - ac)}}{2a}$$

Extrayendo la raíz de cuatro, sacando factor común de dos y finalmente simplificando la mitad de toda la ecuación queda:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 - ac)}}{a}$$

3. Tercera propuesta: Método derivando para encontrar raíces

Condición inicial:

$$a \neq 0$$

$$\triangle = m^2 - \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{\triangle}$$

O también:

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{a}\right)}$$

3.1 Demostración del tercer método

Partiendo de la ecuación general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{\sqrt{(2a)^2}}$$

Realizamos una vez más la propiedad distributiva dentro de la raíz simplificando:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{-b^2}{4a} - \frac{c}{a}\right)}$$

Consideremos que $\frac{-b}{2a}$ equivale al eje de simetría o pendiente cero de la parábola, se procede a reemplazar dando como resultado:

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{a}\right)}$$

4. Ejercicio de ejemplo

A continuación, se aplicará las variantes de ecuación anteriormente sugeridas para resolver el ejercicio planteado.

Dada la función $f(x) = -625 + 75x - 1.25x^2$, donde "$x$" equivale al precio de venta y "y" a la ganancia proyectada. Encuentre los precios mínimos y máximos de venta.

Los coeficientes a, b y c son los siguientes:

$$a = -1.25$$

$$b = 75$$

$$c = -625$$

***Usando la forma de la fórmula sugerida en el primer método:**

Es necesario garantizar según Po-Shen Lo que $a = 1$, dividiendo toda la ecuación para -1.25, quedando:

$$f(x) = x^2 - 60x + 500$$

Los coeficientes a, b y c son los siguientes:

$$a = 1$$

$$b = -60$$

$$c = 500$$

$$\triangle = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

Reemplazando en el discriminante:

$$\triangle = \left(\frac{60}{2}\right)^2 - 500$$

$$\triangle = 400$$

Se concluye que tiene dos soluciones; reemplazando en la ecuación cuadrática:

$$x_{1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\triangle}$$

$$x_1 = \left(\frac{60}{2}\right) + \sqrt{400}$$

$$x_1 = 50\ (precio\ máximo\ de\ venta)$$

$$x_1 = \left(\frac{60}{2}\right) - \sqrt{400}$$

$$x_1 = 10\ (precio\ mínimo\ de\ venta)$$

***Usando la forma de la fórmula sugerida en el segundo método:**

Es necesario garantizar el coeficiente $b = -2$. Por lo tanto, se multiplica todo por $\frac{-2}{75}$

Los términos a, b y c son los siguientes:

$$a = \frac{1}{30}$$

$$b = -2$$

$$c = \frac{50}{3}$$

$$\triangle = 1 - ac$$

$$\triangle = 1 - \left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{50}{3}\right)$$

$$\triangle = \frac{4}{9}$$

Se concluye que tiene dos soluciones; reemplazando en la ecuación cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\triangle}}{a}$$

Reemplazando:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{\frac{1}{30}}$$

Obteniendo los mismos valores, es decir, precio mínimo $x = 10$; precio máximo $x = 50$.

***Usando la forma de la fórmula sugerida en el tercer método:**

Se procede a tomar los valores de la ecuación original, quedando a, b y c de la siguiente manera:

$$a = -1.25$$

$$b = 75$$

$$c = -625$$

En primer lugar, hallamos el eje de simetría o derivada de la función cuando tiende a cero.

$$m = \frac{-b}{2a}$$

Reemplazando:

$$m = \frac{-75}{2(-1.25)}$$

$$m = 30$$

Obtenemos el discriminante:

$$\triangle = m^2 - \frac{c}{a}$$

Reemplazando:

$$\triangle = 30^2 - \frac{(-625)}{(-1.25)}$$

$$\triangle = 400$$

Se concluye que tiene dos soluciones; reemplazando en la ecuación cuadrática:

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{a}\right)}$$

Entonces:

$$x_{1,2} = 30 \pm 20$$

Obteniendo los mismos valores, es decir precio mínimo $x = 10$; precio máximo $x = 50$

CONCLUSIONES

- Cada uno de los métodos utilizados son variantes de la ecuación general. Buscamos simplificar el método para facilitar los procesos. Es más fácil recitar "pendiente más menos raíz de pendiente al cuadrado menos c sobre a" que recitar la ecuación general cuadrática, lo cual facilitaría incluso su memorización.

- Sin duda alguna el Dr. Po-Shen Loh nos muestra, un método que aprovecha una condición inicial, es decir A debe ser solo uno, y, gracias a ello simplifica notablemente el cálculo de las raíces. No obstante, la demostración del método resulta innecesaria, ya que se puede realizar de manera directa. Esta demostración y método, popularizado recientemente, adolece de un discriminante como se aplica. Entonces, es necesario realizar una presentación abreviada del método, dejando visible en todo momento a la discriminante, y evitando así que, en el alumnado, se presenten problemas de despeje o confusiones con el uso apropiado de los signos.

- En el segundo método sugerido, al garantizar que el coeficiente a no sea cero y que el coeficiente "b" sea igual a menos dos, reduce notablemente la extensión de la ecuación cuadrática, haciéndola notablemente manejable, evitando usar valores al cuadrado, permitiendo inclusive un discriminante más amigable de calcular. Lamentablemente esta variante no es válida si el coeficiente "b" es igual a cero.

- El tercer método simplifica la ecuación cuadrática, que ayudaría a resolver de manera más eficiente cualquier parábola de la forma $ax^2 + bx + c$. Ya que, es necesario obtener la derivada igual a cero, el eje de simetría y el vértice en cualquier ejercicio de este tipo, ya tenemos gran parte de la ecuación general que se repite a manera de formula, innecesaria. Esta variante reducida de la ecuación cuadrática es válida siempre que la forma de la cuadrática sea una parábola.

Dejamos al lector el elegir la mejor opción para resolver las ecuaciones cuadráticas y, fomentar en estudiantes y/o docentes el seguir buscando formas creativas para encontrar soluciones.

BIBLIOGRAFÍA

Cruz Mendoza, E. (2013). Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática. [Maestría en Ciencias en Matemática Educativa]: Instituto Politécnico Nacional.

García García, J., Hernández Yañez, M., & Rivera López, M. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, vol. 13.

Hernández Yañez, M., García García, J., & Campo Meneses, K. (2023). Conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática que establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas. Uniciencia.

Herrera Castillo, L. (2013). El concepto leibniziano matemático de función en 1673. Cultura, 127-144.

Martínez Granados, A. (2023). Método alternativo para la enseñanza de ecuaciones de segundo grado. [Trabajo de grado]: Universidad Católica de Manizales.

Ramírez Hernández, J. (2019). El estudio de la ecuación cuadrática en diferentes contextos. Con-Ciencia Boletín Científico De La Escuela Preparatoria No. 3, 6(12), 28-31.

Vargas Fajardo, A. (2020). Resolución de problemas de función cuadrática y uso de aplicaciones móviles en estudiantes de décimo año del Liceo Naval de Guayaquil. [Tesis de maestría]: Universidad Casa Grande.